Iluminação e FotoRealismo:
BRDF e Equação de Rendering

Luís Paulo Peixoto dos Santos

http://gec.di.uminho.pt/mcgav/ifr

BRDF

- Na óptica geométrica a radiância é absorvida, reflectida e/ou transmitida pelas superfícies

- As propriedades da reflectividade de uma superfície afectam a aparência de um objecto

- BRDF (*Bidirectional Reflectance Distribution Function)* – descreve a reflectância de uma superfície.

BRDF

- A BRDF no ponto *x* é definida como a razão entre a radiância diferencial reflectida na direcção Θ e a irradiância diferencial incidente através de um ângulo sólido Ψ.

$$f_r(x, \Psi \to \Theta) = \frac{\partial L(x \to \Theta)}{\partial E(x \leftarrow \Psi)}$$

como $$\partial E(x \leftarrow \Psi) = L(x \leftarrow \Psi)\cos(\vec{N}_x \cdot \Psi)\partial \omega_\Psi$$

então $$f_r(x, \Psi \to \Theta) = \frac{\partial L(x \to \Theta)}{L(x \leftarrow \Psi)\cos(\vec{N}_x, \Psi)\partial \omega_\Psi}$$

Propriedades da BRDF

- A BRDF pode ser, e geralmente é, dependente do comprimento de onda λ
- A BRDF pode tomar qualquer valor positivo
- A BRDF para qualquer ponto *x* de uma superfície é uma função de 5 dimensões: λ, $\Theta = (\theta_r, \varphi_r)$, $\psi = (\theta_i, \varphi_i)$
- O valor da BRDF é o mesmo se as direcções de incidência e reflexão forem trocadas (reciprocidade de Helmhotz)

$$f_r(x, \Psi \to \Theta) = f_r(x, \Theta \to \Psi) \Leftrightarrow f_r(x, \Theta \leftrightarrow \Psi)$$

Propriedade fundamental para algoritmos bidireccionais: seguem caminhos com origem no observador e caminhos com origem nas fontes de luz

Propriedades da BRDF

- O valor da BRDF para uma direcção de incidência Ψ é independente da presença ou não de radiância ao longo de outras direcções.

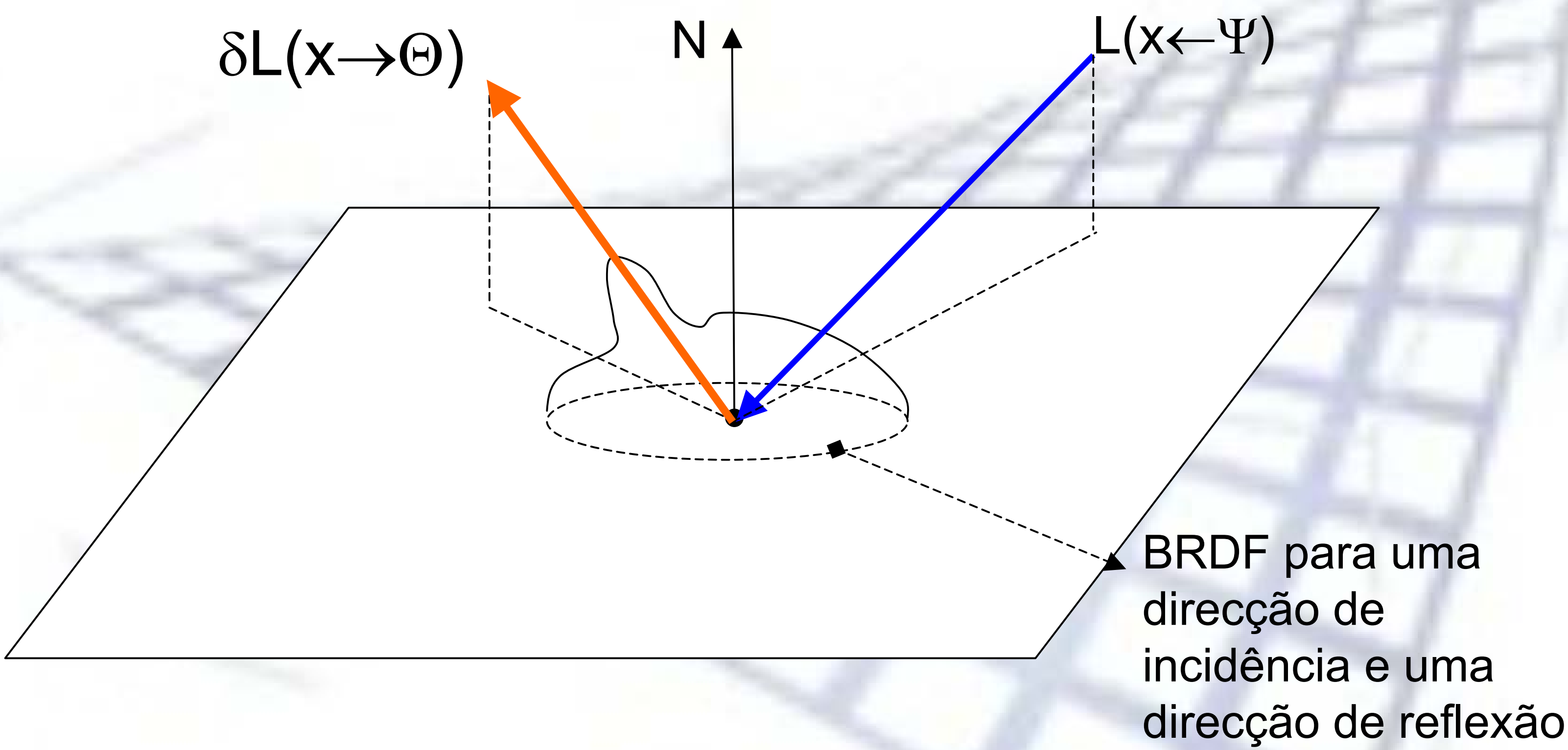
  A BRDF é, portanto, linear para as direcções de incidência, podendo estas ser somadas linearmente (ou integradas no caso contínuo) para todas as direcções de incidência na hemisfera Ω_s

$$\partial L(x \to \Theta) = f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

$$L(x \to \Theta) = \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

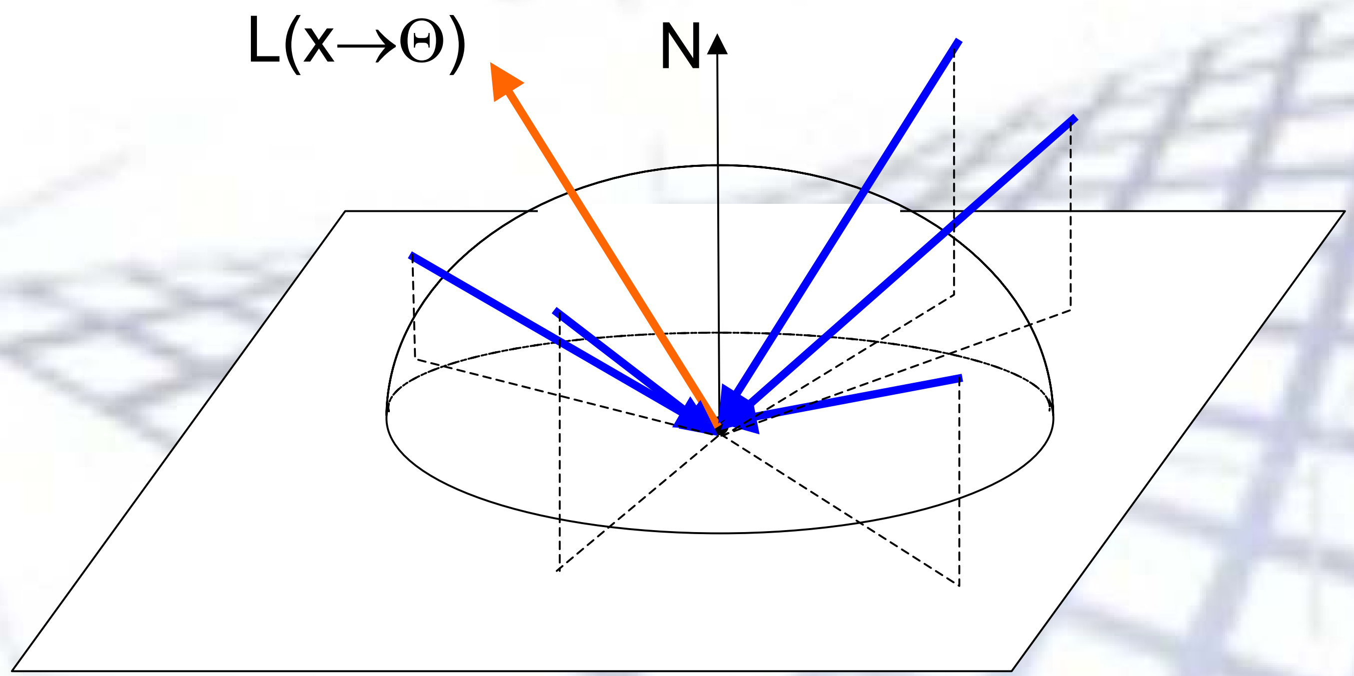
Na prática $L(x \to \Theta)$ é calculado somando as contribuições de um subconjunto de direcções da hemisfera Ω_s, criteriosamente escolhidas

BRDF



$$\partial L(x \rightarrow \Theta) = f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

BRDF



$$L(x \to \Theta) = \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

BRDF – conservação da energia

- O total de fluxo radiante reflectido em todas as direcções deve ser menor que o total de fluxo radiante recebido de todas as direcções.

- Corolário:

$$\forall \Psi : \int_{\Omega_s} f_r(x, \Theta \leftrightarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Theta \leq 1$$

A equação de rendering

- Objectivo: calcular a distribuição da fluxo radiante num ambiente no estado de equilíbrio
- Como o olho humano é sensível à radiância, calculamos valores de radiância ou **valores médios de radiância** sobre certas áreas e ângulos sólidos numa cena
- A equação de *rendering* descreve o transporte de radiância através de um meio não-participativo num ambiente tri-dimensional (3D)
- Formulada por Kajiya, no ACM SIGGRAPH, 1986

A equação de rendering

- A radiância total emitida por um ponto *x* de uma superfície numa direcção Θ é a soma:
  - da radiância autoemitida naquele ponto e naquela direcção $L_e(x \rightarrow \Theta)$
  - com a radiância reflectida naquele ponto e naquela direcção $L_r(x \rightarrow \Theta)$

$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + L_r(x \rightarrow \Theta)$$

A equação de rendering

- Do estudo da BRDF sabemos que:

$$L(x \to \Theta) = \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

logo

$$L(x \to \Theta) = L_e(x \to \Theta) + \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

- Trata-se de um integral recursivo designado por equação de Fredholm de 2ª ordem, pois a quantidade desconhecida aparece em ambos os lados da equação
- Não tem solução analítica

A equação de rendering

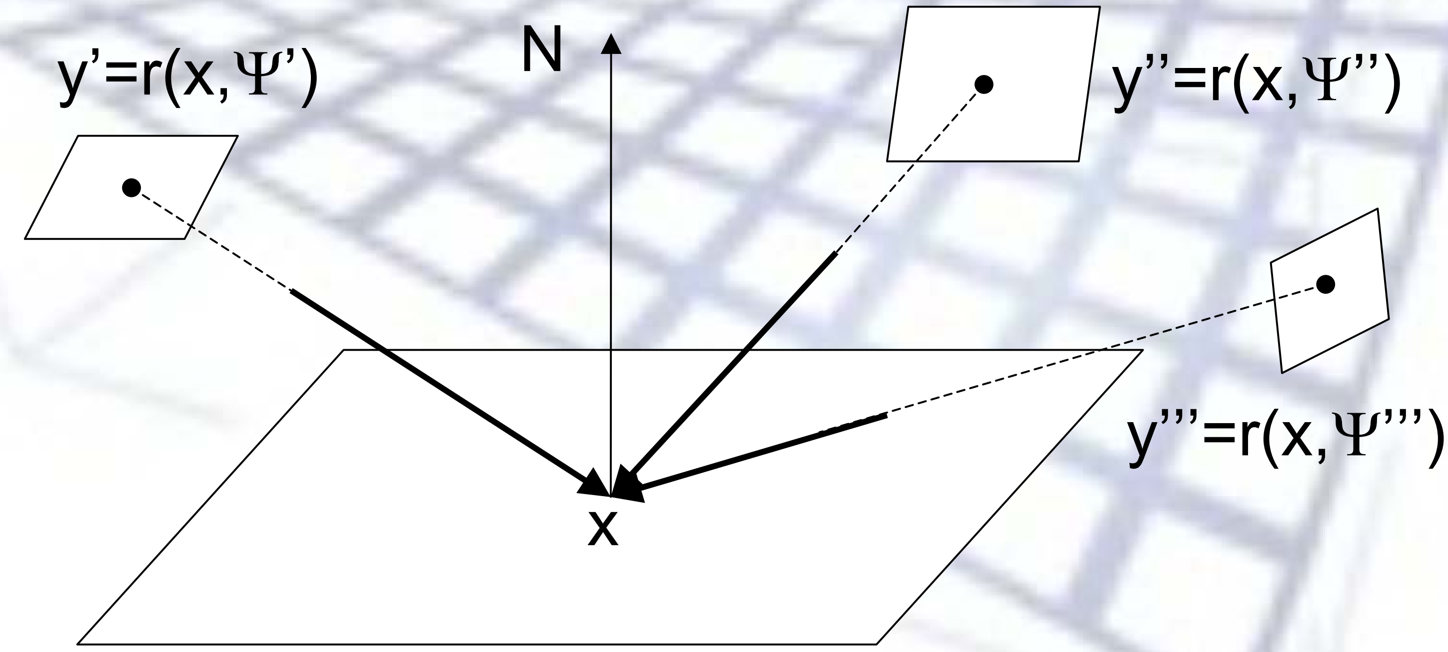
$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

- A radiância autoemitida aplica-se apenas às fontes de luz; serve de inicialização para o cálculo do equilíbrio
- A radiância reflectida é o integral (somatório contínuo) das contribuições das radiâncias incidentes em *x* para todas as direcções Ψ ao longo da hemisfera Ω_s, centrada em *x*
- Formulação hemisférica

A equação de rendering

- Em vez de considerar a radiância incidente $L(x \leftarrow \Psi)$ através de todas as direcções da Ψ hemisfera,

  podemos considerar a radiância oriunda de todos os pontos de todos os objectos da cena que contribuem para a radiância incidente em *x*



A equação de rendering

- A operação de *ray casting*, $r(x,\Psi)$, determina o ponto no objecto visível mais próximo ao longo de um raio com origem em *x* e direcção Ψ.

- Sendo *A* o conjunto de todos os pontos de todas as superfícies da cena então:

$$r(x,\Psi) = \{y : y = x + t_{\text{intersection}}\Psi\}$$

$$t_{\text{intersection}} = \{t : t \in \Re^{+}, x + t\Psi \in A\}$$

A equação de rendering

- A visibilidade *V(x,y)* especifica a visibilidade entre 2 pontos *x* e *y* :

$$\forall x, y \in A : V(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ se x e y são mutuamente visíveis} \\ 0 \text{ se x e y não são mutuamente visíveis} \end{cases}$$

- A visibilidade *V(x,y)* pode ser computada usando a operação de *ray casting*, *r(x,*Ψ):
  x e *y* são mutuamente visíveis se existe alguma direcção Ψ tal que
  y =r(x,Ψ)

- O cálculo da visibilidade é, frequentemente, a operação que consome mais tempo nos algoritmos de iluminação global.
- Se dois pontos não são mutuamente visíveis, diz-se que estão em oclusão

A equação de rendering

- Sendo $y = r(x,\Psi)$, o ponto vísivel a partir de *x* na direcção Ψ, então

$$L(x \leftarrow \Psi) = L(y \rightarrow -\Psi)$$

- Falta converter o ângulo sólido diferencial, $\partial\omega_\Psi$, numa área sólida diferencial, para integrar para todas as áreas em lugar de integrar para todas as direcções.

$$\partial\omega_\Psi = \frac{\cos(\vec{N}_y, \Psi)}{r_{xy}^2}\partial A_y$$

com:

- N_y – normal à superfície no ponto y
- r_{xy} – distância euclidiana entre *x* e *y*

A equação de rendering

- A formulação hemisférica:

$$L(x \to \Theta) = L_e(x \to \Theta) + \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

é equivalente à formulação por áreas

$$L(x \to \Theta) = L_e(x \to \Theta) +$$

$$\int_A f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(y \to -\Psi) V(x, y) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \frac{\cos(\vec{N}_y, \Psi)}{r_{xy}^{2}} \partial A_y$$

O termo *V(x,y)* aparece porque apenas pontos mutuamente visíveis contribuem directamente para a radiância incidente

A equação de rendering

- Introduz-se um termo geométrico *G(x,y)* :

$$G(x,y) = \frac{\cos(\vec{N}_x, \Psi)\cos(\vec{N}_y, \Psi)}{r_{xy}^{\ 2}}$$

logo

$$L(x \to \Theta) = L_e(x \to \Theta) + \int_A f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(y \to -\Psi) V(x,y) G(x,y) \partial A_y$$

A equação de rendering - Síntese

$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + \int_{\Omega_s} f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(x \leftarrow \Psi) \cos(\vec{N}_x, \Psi) \partial\omega_\Psi$$

- Formulação hemisférica

  A radiância emitida por *x* na direcção Θ é igual à soma da radiância autoemitida por *x* com a radiância reflectida por *x*, ambas na mesma direcção.

  A radiância reflectida resulta da contribuição da radiância incidente em *x* integrada para todas as direcções Ψ da hemisfera Ω_s centrada em *x*.

- A formulação hemisférica é a mais apropriada para os algoritmos tipo *ray tracing*

- A principal simplificação consiste em não considerar todas as direcções da hemisfera, mas apenas um subconjunto criteriosamente seleccionado

A equação de rendering - Síntese

$$L(x \to \Theta) = L_e(x \to \Theta) + \int_A f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) L(y \to -\Psi) V(x,y) G(x,y) \partial A_y$$

- Formulação por área

  A radiância emitida por *x* na direcção Θ é igual à soma da radiância autoemitida por *x* com a radiância reflectida por *x*, ambas na mesma direcção.

  A radiância reflectida resulta da contribuição da radiância incidente em *x* integrada para todos os pontos *y* visíveis de *x*.

- A formulação por área é a utilizada pela radiosidade

- A principal simplificação consiste em simplificar a BRDF, considerando que todas as superfícies são perfeitamente difusas, logo reflectem a radiância com a mesma intensidade em todas as direcções.