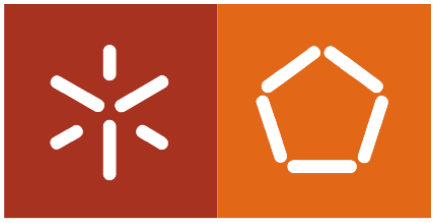


Universidade do Minho
Departamento de Informática

Representação Binária de Números

Notas de estudo

Alberto José Proença

Fevereiro 2018

1. Sistemas de numeração e representação de inteiros

1.1 Sistemas de numeração

1.2 Conversão entre bases

1.3 Base hexadecimal

1.4 Números negativos

1.1 Sistemas de numeração

Os números naturais podem ser representados em qualquer sistema de numeração posicional. Os seres humanos usam normalmente um sistema de numeração baseado na base 10 (com 10 dígitos diferentes). Os computadores são máquinas binárias, pois trabalham só com dois valores (0, 1), os dígitos binários ou de base 2: também conhecidos por **bits**, da contracção do inglês *binary digit*.

Para compreender o que significa a base em que os números são representados num dado sistema de numeração, é necessário relembrar o significado da ordem dos dígitos.
A **ordem** de um dígito dentro de um número é dada pela posição que esse dígito ocupa no número: 0 é a ordem do dígito imediatamente à esquerda da vírgula (ponto) decimal, crescendo no sentido da esquerda, e decrescendo no sentido da direita.

Exemplo

1532.64_{10}

Dígito 4 - ordem -2
Dígito 6 - ordem -1
Dígito 2 - **ordem 0**
Dígito 3 - ordem +1
Dígito 5 - ordem +2
Dígito 1 - ordem +3

A **base** utilizada determina o número de dígitos que podem ser utilizados; por exemplo, base 10 utiliza 10 dígitos (0 a 9), base 2 utiliza 2 dígitos (0 e 1), base 5 utiliza 5 dígitos (0 a 4), base 16 utiliza 16 dígitos (0 a 9, e, A a F).

1.2 Conversão entre bases

A **conversão** de um número escrito na **base *b* para a base decimal** obtém-se multiplicando cada dígito pela base *b* elevada à ordem do dígito, e somando todos estes valores.

Exemplos

1532_6 (base 6)
$1*6^3 + 5*6^2 + 3*6^1 + 2*6^0 = 416_{10}$

1532.64_{10} (base 10)
$1*10^3 + 5*10^2 + 3*10^1 + 2*10^0 + 6*10^{-1} + 4*10^{-2} = 1532.64_{10}$

1532_{13} (base 13)
$1*13^3 + 5*13^2 + 3*13^1 + 2*13^0 = 3083_{10}$

110110.011_2 (base 2)
$1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 0*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-3} = 54.375_{10}$

Na **conversão** de um número na **base decimal para uma base *b***, o processo mais directo é composto por 2 partes:

- **divisão sucessiva da parte inteira** desse número pela respectiva base, sendo os restos obtidos com cada uma dessas divisões, os dígitos da base *b* (a começar com o menos significativo, i.e., mais junto ao ponto decimal) e os quocientes a usar na sucessão de divisões;
- **multiplicação sucessiva da parte fraccionária** desse número pela respectiva base, sendo a parte inteira de cada um dos produtos obtidos, os dígitos da base *b* (a começar com o mais significativo, i.e., mais junto ao ponto decimal), e a parte decimal a usar na sucessão de multiplicações.

Exemplo

235.375_{10}

235/2 = 117	Resto = 1	/* *bit* menos significativo int*/
117/2 = 58	Resto = 1	
58/2 = 29	Resto = 0	
29/2 = 14	Resto = 1	
14/2 = 7	Resto = 0	
7/2 = 3	Resto = 1	
3/2 = 1	Resto = 1	/* *bit* mais significativo int*/
0.375*2 = 0.750	P. int. = 0	/* *bit* mais significativo frac*/
0.75*2 = 1.5	P. int. = 1	
0.5*2 = 1.0	P. int. = 1	/* *bit* menos significativo frac*/

$235.375_{10} = 11101011.011_2$

Outro processo de converter de uma base decimal para outra base utiliza **subtracções sucessivas**, mas apenas é utilizado na **conversão para a base binária**, e mesmo nesta para valores que não ultrapassam a ordem de grandeza dos milhares e normalmente apenas para inteiros.
A grande vantagem deste método é a sua rapidez de cálculo mental, sem ajuda de qualquer máquina de calcular, desde que se saiba de cor a **"tabuada" das potências de 2**:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**

Ajuda também saber como se comportam as potências de 2 para expoentes com mais que um dígito, pois se 2^{10} =1024 ≈10^3 então 2^{1x} =2^x * 2^{10} ≈2^x * 10^3; por exemplo, 2^{16} =2^6 * 2^{10} ≈2^6 * 10^3, ou ≈64 K.
Sendo 2^{10} muito próximo de 10^3, durante muito tempo se utilizou o prefixo **kilo** em múltiplos de 2^{10} dando origem a diversas confusões (dado que o mesmo prefixo tinha duas possíveis interpretações) e a erros de aproximação; por ex., 1 GB corresponde, de facto, a um valor próximo de 1.1 * 10^9.
Ao longo das últimas décadas várias propostas alternativas foram sendo discutidas e a ISO adotou a seguinte terminologia para os múltiplos de potências de 2:

Specific units of IEC 60027-2 A.2 and ISO/IEC 80000

IEC prefix		Representations				Customary prefix	
Name	Symbol	Base 2	Base 1024	Value	Base 10	Name	Symbol
kibi	Ki	2^{10}	1024^1	1024	≈ 1.024×10^3	kilo	k[13] or K
mebi	Mi	2^{20}	1024^2	1 048 576	≈ 1.049×10^6	mega	M
gibi	Gi	2^{30}	1024^3	1 073 741 824	≈ 1.074×10^9	giga	G
tebi	Ti	2^{40}	1024^4	1 099 511 627 776	≈ 1.100×10^{12}	tera	T
pebi	Pi	2^{50}	1024^5	1 125 899 906 842 624	≈ 1.126×10^{15}	peta	P
exbi	Ei	2^{60}	1024^6	1 152 921 504 606 846 976	≈ 1.153×10^{18}	exa	E
zebi	Zi	2^{70}	1024^7	1 180 591 620 717 411 303 424	≈ 1.181×10^{21}	zetta	Z
yobi	Yi	2^{80}	1024^8	1 208 925 819 614 629 174 706 176	≈ 1.209×10^{24}	yotta	Y

Esta tabela está em https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_prefix; recomenda-se a leitura deste *website*.

É possível a partir desta informação extrapolar todos os restantes valores entre 2^{10} e 2^{19}, e ainda ter uma noção da **ordem de grandeza de um valor binário com qualquer número de dígitos** (bits)[1]:

Exemplos

Tabela de potências de 2^{10} a 2^{19}

2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}
1 Ki	**2 Ki**	**4 Ki**	**8 Ki**	**16 Ki**	**32 Ki**	**64 Ki**	**128 Ki**	**256 Ki**	**512 Ki**

Tabela de potências de 2 com expoentes variando de 10 em 10

2^{10}	2^{20}	2^{30}	2^{40}	2^{50}	2^{60}	2^{70}	2^{80}	2^{90}	2^{x0}
1Kibi	**1M**ebi	**1G**ibi	**1T**ebi	**1P**ebi	**1E**xbi	**1Z**ebi	**1Y**obi	**?**	
~10^3	**~10^6**	**~10^9**	**~10^{12}**	**~10^{15}**	**~10^{18}**	**~10^{21}**	**~10^{24}**	**~10^{27}**	**~10^{3*x}**

Com base nesta informação, é agora possível pôr em prática o método das subtracções sucessivas para converter um nº decimal num binário: procura-se a maior potência de 2 imediatamente inferior ao valor do nº decimal, e subtrai-se essa potência do nº decimal; o expoente da potência indica que o nº binário terá um bit 1 nessa ordem; com o resultado da subtracção repete-se o processo até chegar ao resultado 0.

Exemplo

1081.625_{10}

$1081.625 - 2^{10} = 57.625$
$57.625 - 2^{5} = 24.625$
$25.625 - 2^{4} = 9.625$
$9.625 - 2^{3} = 1.625$
$1.625 - 2^{0} = 0.625$
$0.625 - 2^{-1} = 0.125$
$0.125 - 2^{-3} = 0$

$1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1.\,1\,0\,1_2$
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 –3 **< ordem**

Os processadores utilizam um determinado número de bits para representar um número. A quantidade de bits utilizados determina a gama de valores representáveis. Tal como qualquer outro sistema de numeração - onde a gama de valores representáveis com ***n*** dígitos é b^n - a mesma lógica aplica-se à representação de valores binários.
Sendo ***n*** o número de bits utilizados, a **gama de valores representáveis em binário, usando *n* bits é 2^n**.

1.3 Base hexadecimal

O sistema de numeração de **base hexadecimal** (16) é frequentemente utilizada como forma alternativa de representação de valores binários, não apenas pela facilidade de conversão entre estas 2 bases, como ainda pela menor probabilidade de erro humano na leitura/escrita de números.

[1] Refira-se a título de curiosidade, que a nomenclatura dos grandes números, conforme proposta em 1948 pelo *Sistema Internacional de Unidades* e transporta para a Norma Portuguesa NP-18, segue a regra N dada pela expressão "10 elevado a 6N = (N) ilião". Daqui os seguintes termos (correspondência): milhão (10^6), **bi**lião (10^{12}), **tri**lião (10^{18}), **quadri**lião (10^{24}), **quinti**lião (10^{30}), **sexti**lião (10^{36}), **septi**lião (10^{42}), **octi**lião (10^{48}), **noni**lião (10^{54}), **deci**lião (10^{60}), ...

Tal como referido anteriormente, são utilizados 16 dígitos: 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F.

Exemplos

4312_{10} em hexadecimal

4312 / 16 = 269	Resto = 8
269 / 16 = 16	Resto = 13 (dígito D)
16 / 16 = 1	Resto = 0
1 / 16 = 0	Resto = 1

Logo, $4312_{10} = 10D8_{16}$

$2AF3_{16}$ em decimal

$2 * 16^3 + 10 * 16^2 + 15 * 16^1 + 3 * 16^0 = 10995_{10}$

A motivação para usar hexadecimal é a facilidade com que se converte entre esta base e binário. Cada dígito hexadecimal representa um valor entre 0 e 15; cada conjunto de 4 bits representa também um valor no mesmo intervalo. Pode-se então aproveitar esta característica nos 2 tipos de conversão: de binário, agrupando os bits de 4 em 4 a partir do ponto decimal, e convertendo-os; para binário, convertendo cada dígito hexadecimal em 4 bits.

Exemplos

```
      2    A    F  (hexadecimal)
   0010 1010 1111 (binário)
```

$2AF_{16}$ = 001010101111_2

```
   1101 0101 1011 (binário)
     D    5    B  (hexadecimal)
```

110101011011_2 = $D5B_{16}$ (também comum representar como 0xD5B, ou ainda 0xd5b)

1.4 Números negativos

Os computadores lidam com números positivos e números negativos, sendo necessário encontrar uma representação para números com sinal negativo. Existe uma grande variedade de opções, das quais apenas se destacam 4, sendo apenas 3 as actualmente usadas para representar valores negativos:

- **sinal e amplitude/magnitude** (S+M)
- **complemento para 1**
- **complemento para 2**
- **notação em excesso** (ou *biased*)

Como o próprio nome indica, a representação **sinal e amplitude** utiliza um bit para representar o sinal, o bit mais à esquerda: **0** para indicar um valor positivo, **1** para indicar um valor negativo.

Na representação em **complemento para 1** invertem-se todos os bits de um número para representar o seu complementar: assim se converte um valor positivo para um negativo, e vice-versa. Quando o bit mais à esquerda é **0**, esse valor é positivo; se for **1**, então é negativo.

Exemplo

100_{10} = 01100100_2 (com 8 bits)

Invertendo todos os bits:
10011011_2 = **-100_{10}**

O problema desta representação é que existem 2 padrões de bits para o **0**.
Nomeadamente $0_{10} = 00000000_2 = 11111111_2$.
A solução encontrada consiste em representar os números em **complemento para 2** .
Para determinar o negativo de um número negam-se todos os seus bits e soma-se uma unidade.

Exemplo

100_{10} = 01100100_2 (com 8 bits)

Invertendo todos os bits:
10011011_2

Somando uma unidade :
$10011011_2 + 1 = 10011100_2$ = **-100_{10}**

A representação em complemento para 2 tem as seguintes características:

- o bit da esquerda indica o sinal;
- o processo indicado no parágrafo anterior serve para converter um número de positivo para negativo e de negativo para positivo;
- o 0 tem uma representação única: todos os bits a 0;
- a gama de valores que é possível representar com *n* bits é $-2^{n-1} \ldots 2^{n-1}-1$.

Exemplo

Qual o número representado por **11100100_2** (com 8 bits)?

Como o bit da esquerda é 1 este número é negativo.
Invertendo todos os bits:
00011011_2
Somando uma unidade :
$00011011_2 + 1 = 00011100_2 = 28_{10}$
Logo:
11100100_2 = **-28_{10}**

Como é que se converte um número representado em complemento para 2 com *n* bits, para um número representado com mais bits?
Resposta: basta fazer a extensão do sinal! Se o número é positivo acrescenta-se 0's à esquerda, se o número é negativo acrescenta-se 1's à esquerda.

Exemplo

Representar os seguintes números (de 8 bits) com 16 bits:

01101010_2

Positivo, logo:

$00000000\ 01101010_2$

11011110_2

Negativo, logo:

$11111111\ 11011110_2$

A multiplicação e a divisão têm algoritmos algo complexos que ultrapassam o âmbito destas notas de estudo. No entanto a **multiplicação e a divisão por potências de 2** realizam-se efectuando deslocamentos de bits à direita ou à esquerda, respectivamente.

Fazer o deslocamento à esquerda uma vez - num número binário - corresponde a multiplicar por 2, duas vezes corresponde a multiplicar por 4 (= 2^2), 3 vezes corresponde a multiplicar por 8 (= 2^3), e assim sucessivamente. O mesmo se aplica à divisão com o deslocamento à direita.

Exemplo

Dividir 11001010_2 (= 202_{10}) por 4:

Deslocar à direita 2 vezes:

$000110010.1_2 = 50.5_{10}$

Multiplicar 000001010_2 (= 10_{10}) por 8.

Deslocar à esquerda 3 vezes:

$001010000_2 = 80_{10}$

Esta regra também se aplica aos números em complemento para 2 desde que se mantenha o sinal.

A última notação referida no início - **notação em excesso** – tem uma vantagem sobre qualquer outra referida anteriormente: a representação numérica dos valores em binário, quer digam respeito a valores com ou sem sinal, tem o mesmo comportamento na relação entre eles. Por outras palavras, o valor em binário com todos os bits a 0 representa o menor valor inteiro, quer este tenha sinal ou não, e o mesmo se aplica ao maior valor em binário, i.e., com todos os bits a 1: representa o maior inteiro, com ou sem sinal.

Exemplo

Binário (8 bits)	**Sinal + Ampl**	**Compl p/ 1**	**Compl p/ 2**	**Excesso** (128)
$0000\ 00001_2$	+1	+1	+1	-127
. . .				
$1000\ 00001_2$	-1	-126	-127	+1
. . .				
$1111\ 11110_2$	-126	-1	-2	+126

Como o próprio nome sugere, esta codificação de um inteiro (negativo ou positivo) em binário com *n* bits é feita sempre em excesso (de 2^{n-1} ou 2^{n-1}-1).
Neste exemplo com 8 bits, o valor $+1_{10}$ é representado em binário, em notação por excesso de 2^{n-1}, pelo valor ($+1_{10}$ + excesso) = ($+1_{10}$ + 128_{10}) = ($0000\ 00001_2$ + $1000\ 00000_2$) = $1000\ 00001_2$.

A tabela que a seguir se apresenta, representando todas as combinações possíveis com 4 bits, ilustra de modo mais completo as diferenças entre estes 4 modos (+1 variante) de representar inteiros com sinal.

Binário (4 bits)	**Sinal + Ampl**	**Compl p/ 1**	**Compl p/ 2**	**Excesso** (7)	**Excesso** (8)
0000	0	0	0	-7	-8
0001	1	1	1	-6	-7
0010	2	2	2	-5	-6
0011	3	3	3	-4	-5
0100	4	4	4	-3	-4
0101	5	5	5	-2	-3
0110	6	6	6	-1	-2
0111	7	7	7	0	-1
1000	-0	-7	-8	1	0
1001	-1	-6	-7	2	1
1010	-2	-5	-6	3	2
1011	-3	-4	-5	4	3
1100	-4	-3	-4	5	4
1101	-5	-2	-3	6	5
1110	-6	-1	-2	7	6
1111	-7	-0	-1	8	7

2. Representação de reais em vírgula flutuante

2.1 Notação científica

2.2 Normalização na representação

2.3 Intervalo e precisão de valores representáveis

2.4 Formato binário dum valor em fp

2.5 O bit escondido

2.6 A norma IEEE 754-2008 para valores em fp

2.7 Considerandos finais

2.1 Notação científica

A representação de um valor infinito de valores usando uma máquina finita vai obrigar a assumir um conjunto de compromissos, os quais, no caso dos reais, irão afectar não só a gama de valores representáveis, como ainda a sua precisão. A utilização da notação científica, do tipo:

$$\textbf{Valor} = (-1)^{S} * \textbf{Mantissa} * \textbf{Radix}^{Exp}$$

é ainda aquela que permite obter a melhor representação de um n.º real em vírgula flutuante (ou *fp* na terminologia inglesa) com um n.º limitado de dígitos. O valor do radix é de 10 na representação decimal, e pode ser 2 ou uma potência de 2 na representação interna num computador. A IBM usava nos seus *mainframes* um radix de 16, pois permitia-lhe aumentar o intervalo de representação de valores; contudo os problemas que tiveram com esta representação deram mais força à utilização do valor 2 como radix.

2.2 Normalização na representação

A notação científica permite que um mesmo n.º possa ser representado de várias maneiras com os mesmos dígitos (por ex., 43.789E+12 , .43789E14, 43789E+09). Para facilitar a sua representação - omitindo a necessidade de representar o ponto/vírgula decimal - impõe-se a adopção de uma norma de representação, e diz-se que um dado n.º fp está normalizado quando cumpre essa norma. Alguns autores consideram que um n.º está **normalizado** quando a mantissa (ou parte fraccionária, **F**) se encontra no intervalo **]Radix , 1]**. Por outras palavras, existe sempre um dígito diferente de 0 à esquerda do ponto decimal.

Num exemplo em decimal com 7 algarismos na representação de fp (5 para a mantissa e 2 para o expoente), o intervalo de representação dum fp normalizado, seria em valor absoluto [1.0000E-99, 9.9999E+99] . Existe aqui um certo desperdício na representação de fp usando 7 algarismos, pois fica excluído todo o intervalo [0.0001E-99, 1.0000E-99[. Para se poder otimizar a utilização dos dígitos na representação de fp, aceita-se a representação de valores menores que o menor valor normalizado, mas garantindo que cada nº tenha apenas uma representação (por ex., fixando o expoente com o menor valor possível da representação normalizada). Esta representação tem atualmente a designação de **subnormal**.

Todas as restantes representações designam-se por **não normalizadas**.

2.3 Intervalo e precisão de valores representáveis

Pretende-se sempre com qualquer codificação obter o maior intervalo de representação possível e simultaneamente a melhor precisão (relacionada com a distância entre 2 valores consecutivos). Existindo um n.º limitado de dígitos para a representação de ambos os valores - **F** e **Exp** - há que ter consciência das consequências de se aumentarem ou diminuírem cada um deles (não esquecer de 1 bit para o sinal).

O intervalo de valores representáveis depende essencialmente do **Exp**, enquanto a precisão vai depender do número de dígitos que for alocado para a parte fraccionária, **F**. Numa representação em binário, a

dimensão mínima a usar em cálculo científico para fp (que será sempre um múltiplo da dimensão da célula) deverá ser pelo menos 32 bits. Em sistemas embebidos e em *gadgets* eletrónicos (como consolas de jogos e *smartphones*), começa a haver procura para um representação com 16 bits, mesmo sabendo-se à partida que esta representação tem uma precisão bastante reduzida.

Usando **32 bits** para representação mínima de fp em cálculo científico, torna-se necessário encontrar um valor equilibrado para a parte fraccionária e para o expoente. Esse valor é **8 para o expoente** - permite representar uma gama da ordem de grandeza dos 10^{39} - e pelo menos **23 para a parte fraccionária** - permite uma precisão equivalente a 7 algarismos decimais.

2.4 Formato binário dum valor em fp

Existem 3 campos a representar nos 32 bits dum valor em fp: o sinal (1 bit), a parte fraccionária (23 bits) e o expoente (8 bits). Para se efectuar qualquer operação aritmética estes 3 campos terão de ser identificados e separados para terem um tratamento distinto na unidade que processa os valores em fp. A ordem da sua representação (da esquerda para a direita) segue uma lógica:

- **sinal, S**: ficando mais à esquerda, permite usar o mesmo *hardware* (que trabalha com valores inteiros) para testar o sinal de um valor em fp;
- **expoente, E**: ficando logo a seguir vai permitir fazer comparações quanto à grandeza relativa entre valores absolutos em fp, sem necessidade de separar os 3 campos: basta comparar os valores como se de valores meramente binários se tratassem;
- **parte fracionária, F**: é o campo mais à direita.

2.5 O bit escondido

Um valor normalizado tem sempre um dígito diferente de zero à esquerda do ponto decimal. Se o sistema de numeração é decimal, esse dígito pode ser um de entre 9 possíveis; se o sistema de numeração é binário, esse dígito só pode ser um. Assim, **e apenas na representação binária normalizada**, esse dígito à esquerda do ponto decimal toma sempre o mesmo valor, sendo um desperdício do espaço de memória estar a representá-lo fisicamente. Ele apenas se torna necessário para efectuar as operações, permanecendo **escondido** no seu armazenamento. Ganha-se um bit para melhorar a precisão, permitindo passar para 24 o n.º de bits da parte fraccionária (numa representação com 32 bits).

2.6 A norma IEEE 754-2008 para valores em fp

A representação de valores em fp usando 32 bits e com o formato definido anteriormente permite ainda várias combinações para representar o mesmo valor. Por outro lado, não ficou ainda definido como representar os valores subnormais, bem como a representação de valores externos ao intervalo permitido com a notação normalizada.

A norma IEEE 754-2008[2] define com clareza estas imprecisões, permitindo uma maior compatibilidade ao nível dos dados no porte de aplicações entre sistemas que adoptem a mesma norma. De momento todos os processadores disponíveis comercialmente com unidades de fp suportam a norma IEEE 754-2008 no que diz respeito aos valores de 32 bits. Aspectos relevantes desta norma:

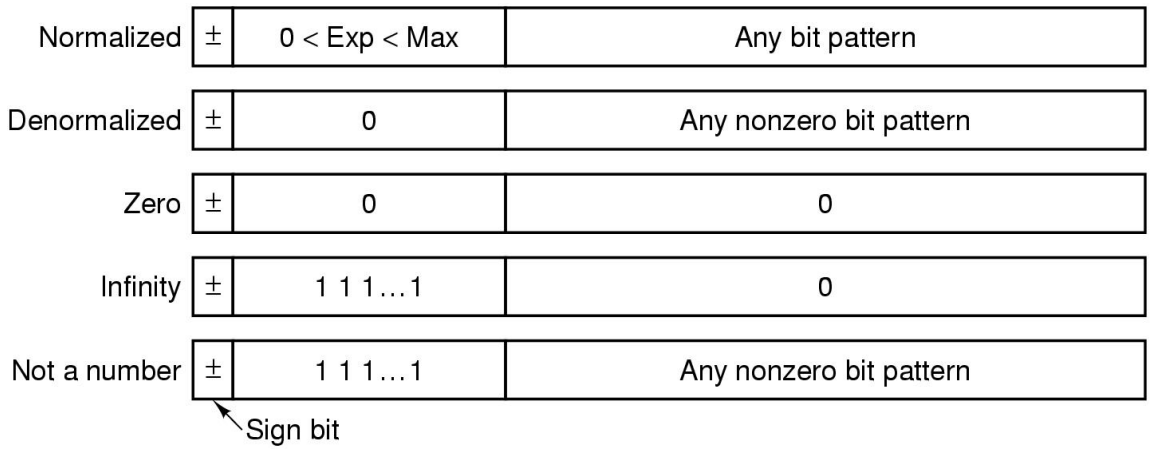
- **representação do sinal e parte fracionária**: segue o formato definido anteriormente, sendo a parte fracionária representada sempre em valor absoluto, e considerando o bit escondido na representação normalizada;

- **representação do expoente**: para permitir a comparação de valores em fp sem separação dos campos, a codificação do expoente deveria ser tal que os valores menores de expoente (os negativos) tivessem uma representação binária menor que os valores positivos (e maiores); as codificações usando complemento para 1 ou 2, ou ainda a representação usando sinal+amplitude, não possuem este comportamento, i.e., os valores negativos têm o bit mais significativo (à esquerda) igual a 1, o que os torna, como números binários, maiores que os números positivos; a

[2] Para mais detalhes sobre esta norma sugere-se que comece por https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

notação que satisfaz este requisito é uma notação por excesso, na qual se faz um deslocamento na gama de valores decimais correspondentes ao intervalo de representação de n bits, de 0 a 2^{n-1}, de modo a que o 0 decimal passe a ser representado não por uma representação binária com tudo a zero, mas por um valor no meio da tabela; usando 8 bits por exemplo, esta notação permitiria representar o 0 pelo valor 127 ou 128; a norma IEEE adoptou o primeiro destes 2 valores, pelo que a representação do expoente se faz por notação **por excesso 127**; o expoente varia assim entre -127 e +128;

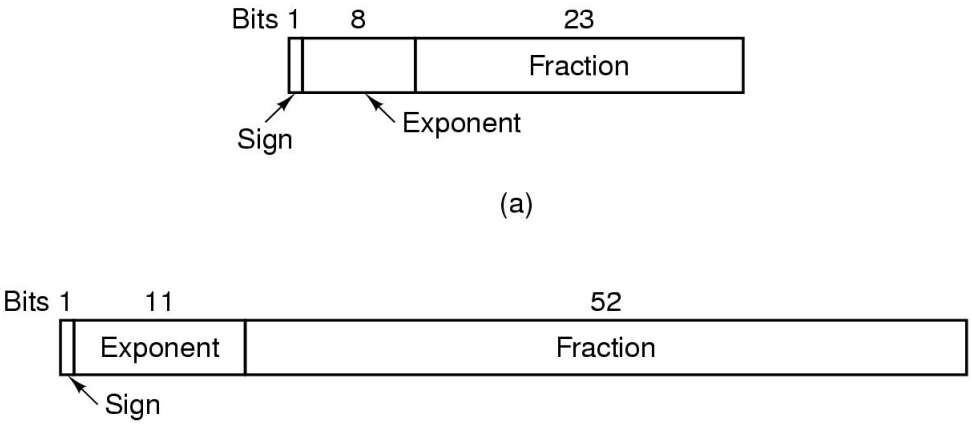
- **valor decimal de um fp em binário** (normalizado)**: $V = (-1)^S * (1.F) * 2^{E-127}$**, em que S, F e E representam respectivamente os valores em binário dos campos no formato em fp;
- **representação de valores subnormais** (que já foram designados de *desnormalizados*): para poder contemplar este tipo de situação a norma IEEE reserva o valor de **$E = 0000\ 0000_2$** para representar valores subnormais, desde que se verifique também que **$F \neq 0$**; o valor decimal vem dado por
  $V = (-1)^S * (0.F) * 2^{-126}$
- **representação do zero**: é o caso particular previsto em cima, onde **$E = 0$** e **$F = 0$** ;
- **representação de ±∞** : a norma IEEE reserva a outra extremidade de representação do expoente; quando **$E = 1111\ 1111_2$** e **$F = 0$** , são esses os "valores" que se pretendem representar;
- **representação de n.º não real**: quando o valor que se pretende representar não é um n.º real (imaginário por exemplo), a norma prevê uma forma de o indicar para posterior tratamento por rotinas de excepção; neste caso **$E = 1111\ 1111_2$** e **$F \neq 0$** .



2.7 Considerandos finais

A secção anterior focou-se nos formatos de representação de valores reais fp com 32 bits da norma IEEE 754-2008, designados por valores de **precisão simples**. No entanto a norma contempla ainda a representação de valores em fp com outras dimensões (destaque para a utilização em cálculo científico) usando o dobro do n.º de bits, 64, também conhecida pela representação em **precisão dupla**. Nesta representação o expoente é representado por 11 bits e a parte fracionária por 52 bits, permitindo um maior intervalo de representação e uma melhor precisão.

Dentro dos formatos de representação, a norma IEEE 754-2008 suporta ainda um formato menor com 16 bits (*half-precision*, 5 bits para expoente e 10 para a parte fracionária), e outros 2 formatos maiores com 128 e 256 bits. A figura em baixo ilustra os formatos das representações de fp em precisão simples e dupla.



Representação de reais com precisão simples (a) e dupla (b)

Ainda sobre formatos de representação, a realização de operações fp em *hardware* tem um custo relativamente alto para suportar na íntegra todos estes formatos, em especial o tratamento de valores subnormais. Assim, vários processadores não suportam em *hardware* valores subnormias e noutros, mesmo suportando, os compiladores optam por evitar os subnormais, ativando os modos DAZ (*Denormals Are Zero*) e FTZ (*Flush To Zero*); o primeiro para tratar como zeros argumentos de instruções, o 2º para passar para zero resultados das instruções, evitando assim subnormais e eventuais *underflows*.

Relativamente à representação de valores em *half-precision*, ainda muito poucas unidades de processamento as suportam, e as poucas que a suportam conseguem ler e escrever valores em *half-precision*, mas convertem esses valores para precisão simples antes de fazer as operações e novamente para *half-precision* no fim, para guardar o resultado da operação.

Para além da representação de valores, a norma especifica também as regras de arredondamento; por ex., arredondamento na direção do zero (também conhecido por truncatura), ou arredondamento para o mais próximo e no caso de empate, para o par mais próximo.

A norma especifica ainda como efetuar algumas operações (destaque para as trigonométricas) e como tratar exceções.