

Mestrado Integrado  
Engenharia Informática

Integração de Monte Carlo

Visualização e Iluminação II

Luís Paulo Peixoto dos Santos

$$L(p \rightarrow \omega_r) = L_e(p \rightarrow \omega_r) + \int_{\Omega_s} f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\vec{N}_p, \omega_i) d\omega_i$$

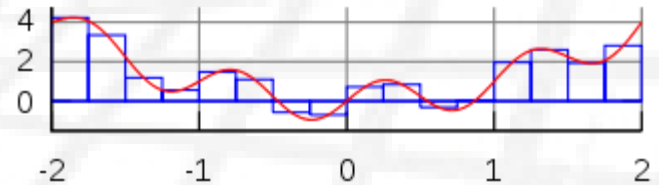
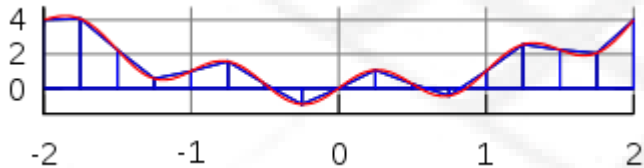
- A equação de rendering não tem solução analítica
- Os algoritmos de rendering calculam soluções numéricas aproximadas
- São seleccionadas N amostras (direcções  $\omega_i$ ) do domínio de integração (semiesfera)
- A contribuição de cada amostra é adicionada ao resultado final com um determinado peso,  $w_i$ : o integral transforma-se numa soma

$$L(p \rightarrow \omega_r) = L_e(p \rightarrow \omega_r) + \sum_{i=0}^{N-1} w_i f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\vec{N}_p, \omega_i)$$

- A selecção de quais e quantas as direcções a amostrar e qual o peso  $w_i$  de cada amostra determinam a qualidade e desempenho dos algoritmos de iluminação global

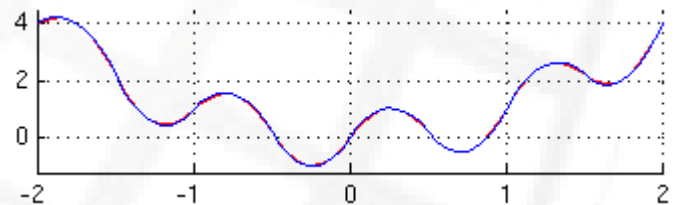
Regra do rectângulo

$$F(f(\cdot), x_{i-1}, x_i) = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$



Regra do trapézio

$$F(f(\cdot), x_{i-1}, x_i) = (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$



Regra de Simpson

$$F(f(\cdot), x_{i-1}, x_i) = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6} \left[ f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right]$$

# Quadratura numérica determinística – Exemplo: método dos rectângulos

- O domínio é **uniformemente** subdividido em N subdomínios de extensão h,  $[a_i, a_i+h[$
- Para cada subdomínio é calculado um **estimador primário** dado pelo produto da extensão do domínio e o valor da função no centro do subdomínio
- O **estimador final** é a **média aritmética** dos estimadores primários

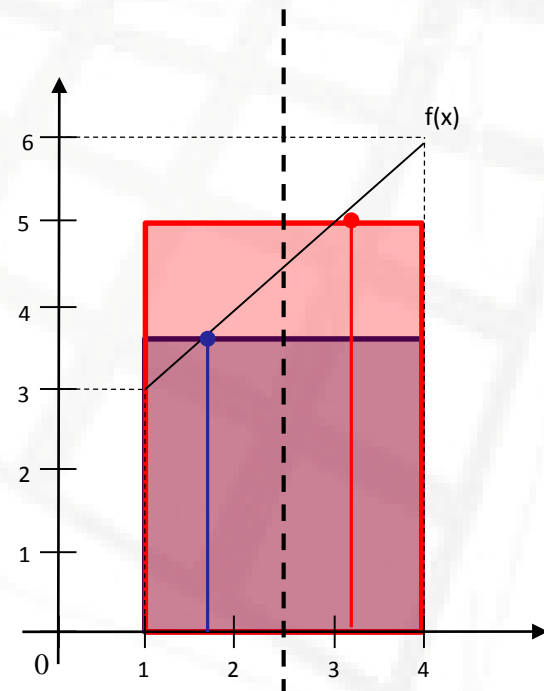
$$I = \int_1^4 (x+2)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 + 2x \Big|_1^4 = 13,5$$

$$N = 2; h = 1.5; a_0 = 1; a_1 = 2.5$$

$$f(x_0) = f(1.75) = 3.75 \quad \langle I_{x_0} \rangle = 3 * f(1.75) = 11.25$$

$$f(x_1) = f(3.25) = 5.25 \quad \langle I_{x_1} \rangle = 3 * f(3.25) = 15.75$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} * (11.25 + 15.75) = 13.5$$



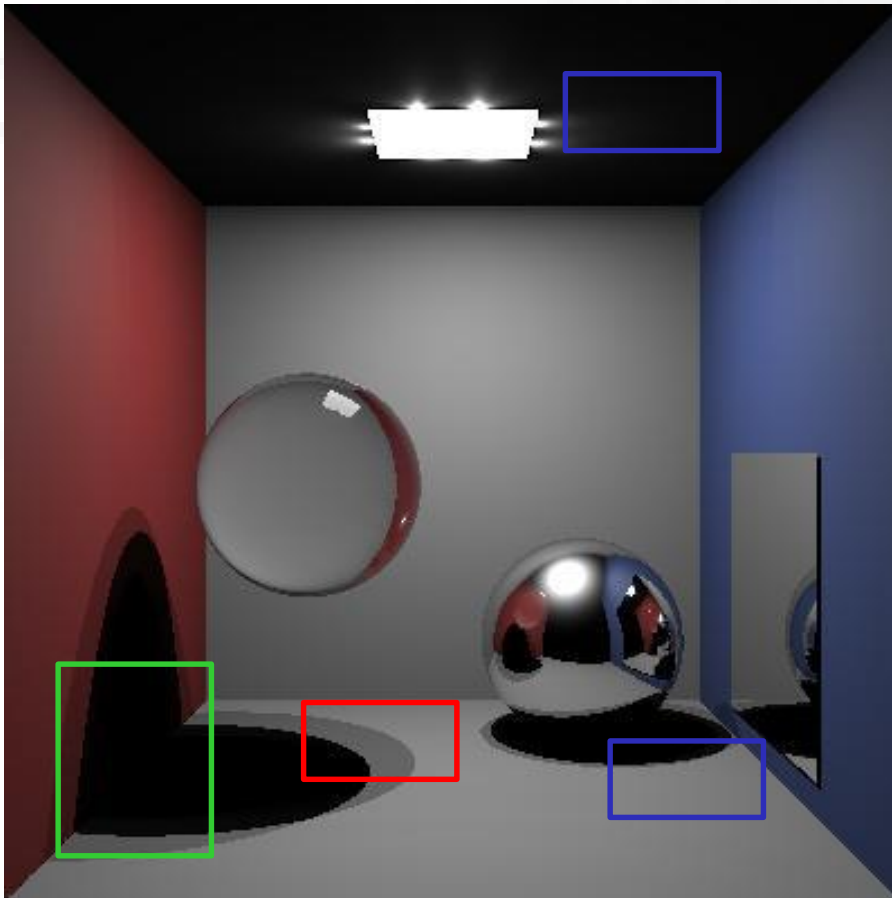
- Desvantagens:
  - A localização das amostras no domínio está perfeitamente definida e não varia. Isto implica que há pontos do domínio da função que não contribuem NUNCA para o valor do estimador do integral. E se o valor da função nestes pontos variar significativamente?

**NOTA:** no contexto do rendering isto significa que as direcções a amostrar na semiesfera estão pré-determinadas o que pode levar a ignorar direcções importantes

- Estes métodos implicam  $N$  amostras por dimensão. Uma função  $k$ -dimensional requer portanto  $N^k$  amostras

**NOTA:** O número de dimensões  $k$  num algoritmo de rendering é infinito

A selecção determinística de um número limitado de direcções de amostragem resulta em:



- Descontinuidades abruptas, principalmente as resultantes de efeitos de iluminação

- *aliasing*

- Simulação de um número limitado de efeitos de iluminação

- Objectivo: calcular o integral de  $f(x)$  no domínio  $D$ :

$$I = \int_D f(x) dx$$

- O valor esperado de uma função aleatória é o valor médio da função, calculado sobre um conjunto de valores  $x$  pertencentes ao domínio da função e distribuídos com probabilidade  $p(x)$ :

$$E(f(x)) = \int_D f(x) p(x) dx$$

- O valor esperado de uma função é aproximado pela média de um número de amostras aleatórias - converge para o valor correcto quando o número de amostras se aproxima de infinito (*Lei dos Grandes Números*):

$$E(f(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

- Combinando estes dois resultados podemos construir um integrador numérico para estimar o valor do integral:

$$\begin{aligned} E(f(x)) &= \int_D f(x)p(x)dx && \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \\ &= \int_D \frac{f(x)p(x)dx}{p(x)} && \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \\ &= \int_D f(x)dx && \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \end{aligned}$$

- O integrador é  $\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \approx I$  com  $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle I \rangle = I$

O integral pode ser estimado pelo somatório pesado de amostras de  $f(x)$  geradas **aleatoriamente**



$$\int_D f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

- Este integrador numérico permite aproximar o valor do integral seleccionando **estocasticamente** pontos (amostras) no domínio da função!
- Se a distribuição de probabilidade usada para seleccionar os pontos de amostragem é uniforme, então todos os pontos têm a mesma probabilidade

$$p(x_i) = p, \forall x_i \in D$$

- O integrador passa a ser:

$$\int_D f(x)dx \approx \frac{1}{N * p} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

- Distribuição uniforme

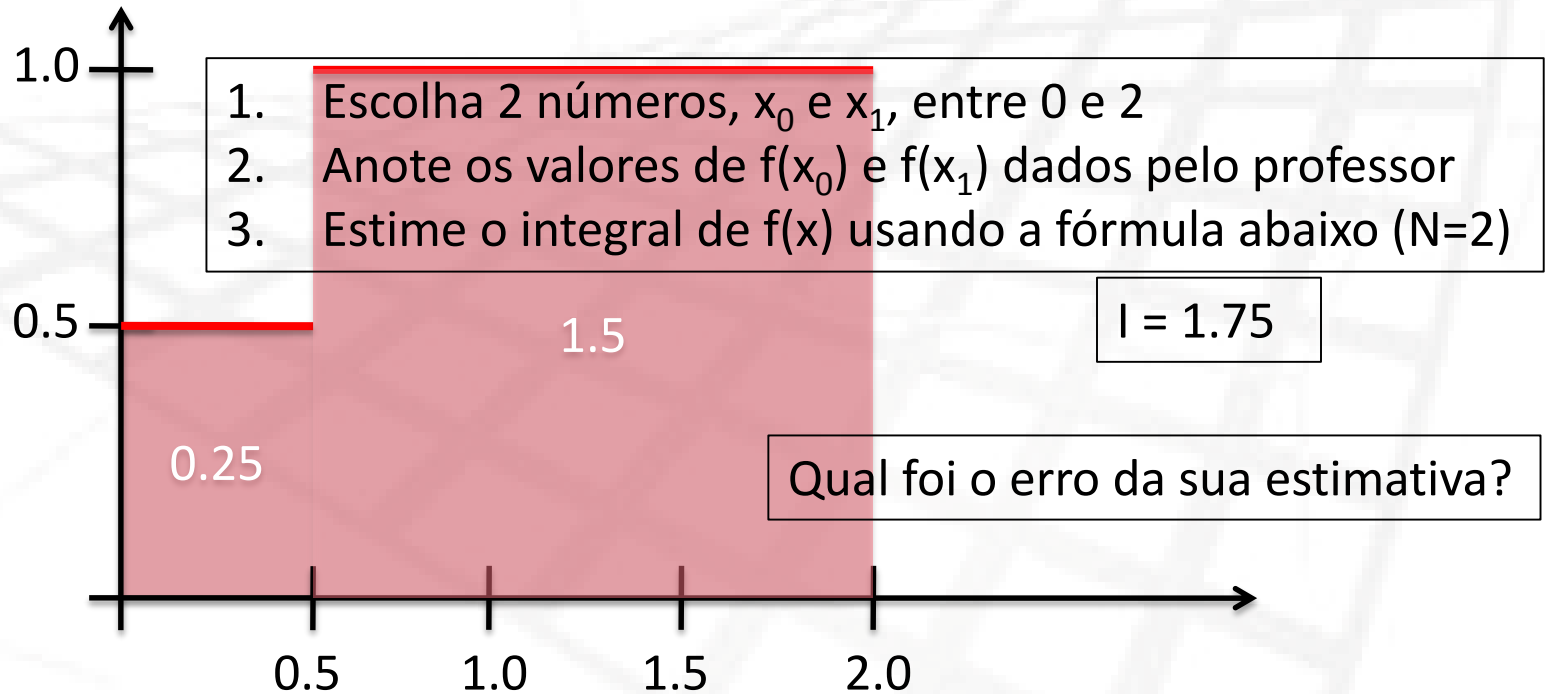
$$p(x) = c; \quad \int_a^b p(x)dx = 1;$$

$$\int_a^b cdx = 1; \quad cx \Big|_a^b = 1;$$

$$c(b - a) = 1;$$

$$c = \frac{1}{b - a} \Leftrightarrow p(x) = \frac{1}{b - a}$$

$$\int_D f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \frac{b - a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$



$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{(2-0)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

$$\int_D f(x)dx \approx \frac{1}{N * p} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

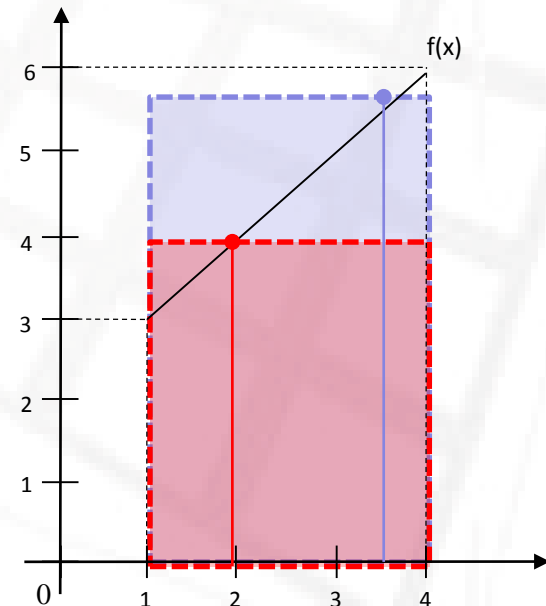
O valor do integral é aproximado, para cada  $x_i$ , por um volume cuja altura é o valor de  $f(x_i)$  e cuja largura é dada pelo tamanho do domínio de integração ( $b-a$ )

$$I = \int_1^4 (x+2)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 + 2x \Big|_1^4 = 13,5$$

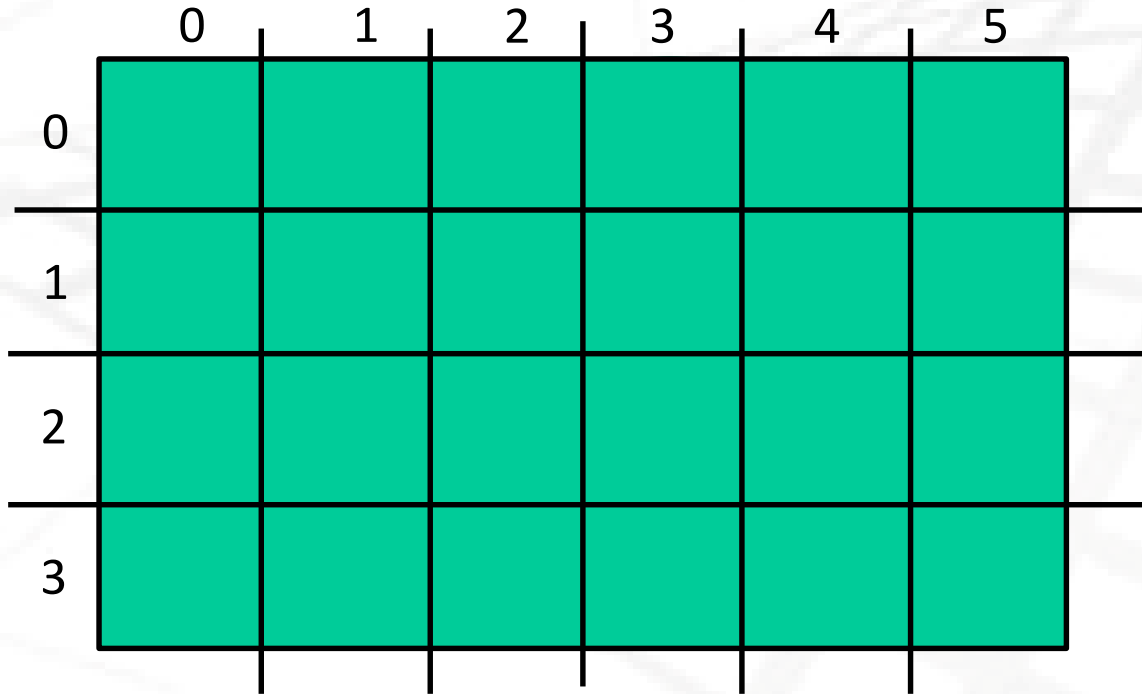
$$x_0 = 2 \quad f(x_0) = f(2) = 4 \quad \langle I_0 \rangle = (4-1) f(x_0) = 12$$

$$x_1 = 3,5 \quad f(x_1) = f(3,5) = 5,5 \quad \langle I_1 \rangle = (4-1) f(x_1) = 16,5$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} * (\langle I_0 \rangle + \langle I_1 \rangle) = (12 + 16,5) / 2 = 14,25$$

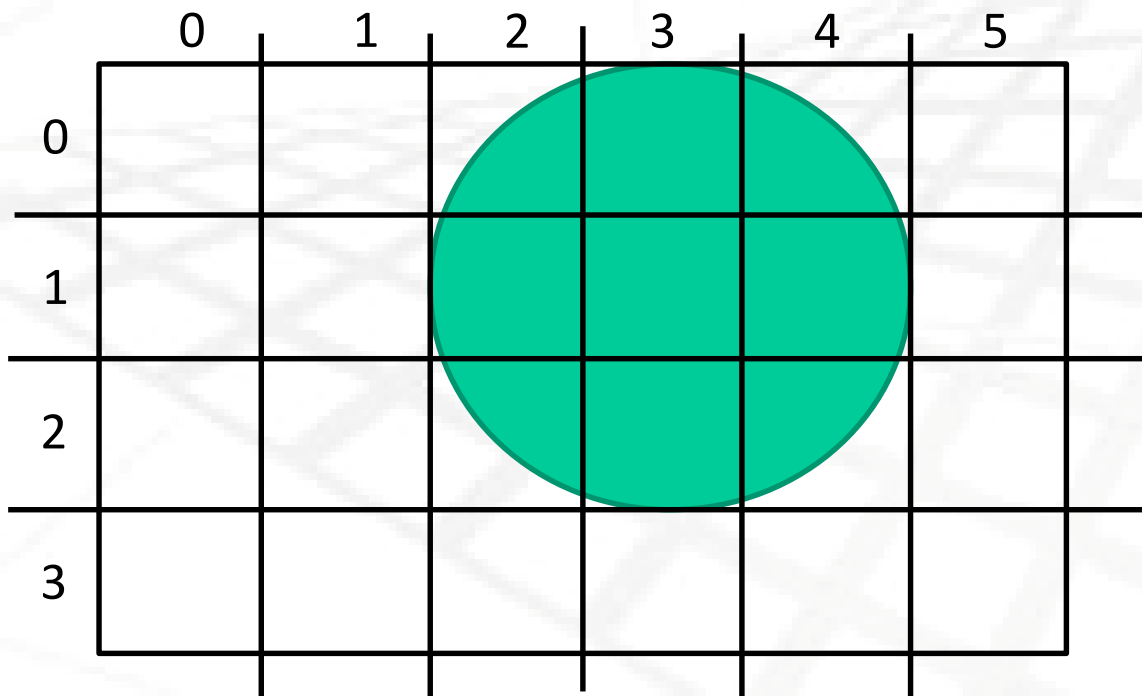


## Calcule a área da superfície escondida



$$A = \int_0^3 \int_0^5 f(x, y) dx dy \approx \frac{24}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i)$$

Calcule a área da superfície escondida



$$A = \int_0^3 \int_0^5 f(x, y) dx dy = \pi * r^2 = 7.0686$$

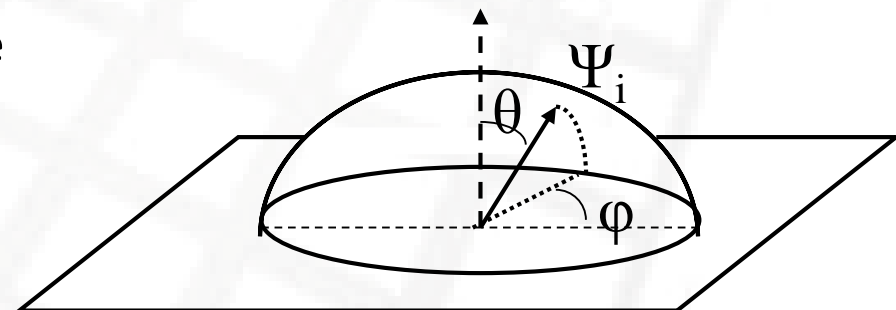
## AMOSTRAGEM UNIFORME DA SEMI-ESFERA

$$L_r(p \rightarrow \omega_r) = \int_{\Omega_s} f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\vec{N}_p, \omega_i) d\omega_i$$

O ângulo sólido da semi-esfera é  $2\pi$ , logo  $p(\omega)=1/2\pi$

Seleccionar as direcções aleatoriamente  
e seguir o raio com direcção

$$\Psi_i = (\theta, \varphi) = (\cos^{-1} \xi_1, 2\pi\xi_2)$$



$$\langle L_r(p \rightarrow \omega_r) \rangle = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^N f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\theta_i)$$

$$\langle L(p \rightarrow \omega_r) \rangle = L_e(p \rightarrow \omega_r) + L_d(p \rightarrow \omega_r) + \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^N f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\theta_i)$$

$\langle L(p \rightarrow \omega_r) \rangle$  Radiância reflectida por  $p$  na direcção  $\omega_r$

$L_e(p \rightarrow \omega_r)$  Radiância auto-emitida por  $p$  na direcção  $\omega_r$

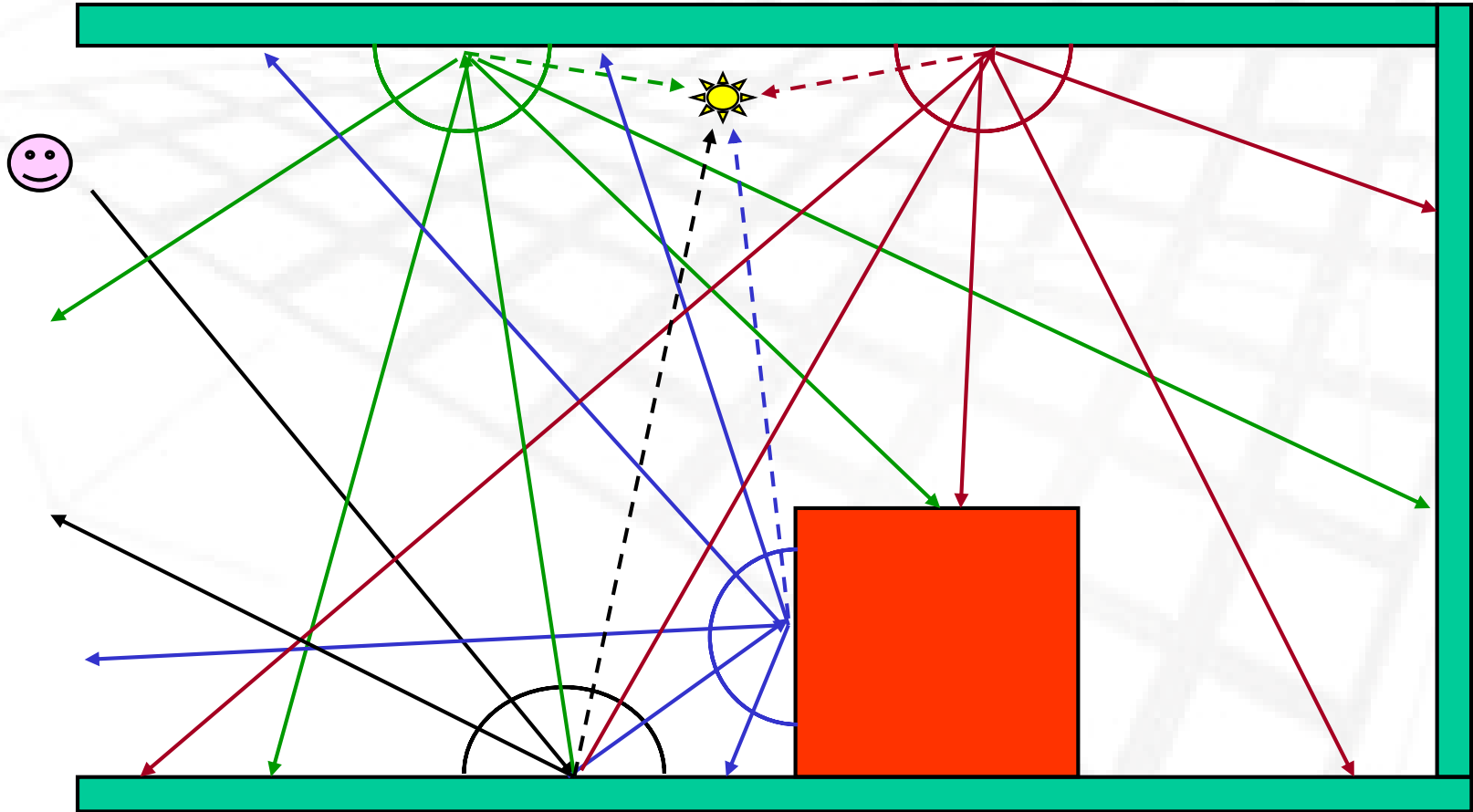
$L_d(p \rightarrow \omega_r)$  Radiância reflectida por  $p$  na direcção  $\omega_r$  devida a iluminação directa

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^N f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\theta_i)$$

Radiância reflectida por  $p$  na direcção  $\omega_r$  devida a iluminação indirecta



# Monte Carlo *ray tracing*



- Redução da variância
  - Força bruta: Aumento do número de amostras  $N$
  - Amostragem Estratificada
  - Amostragem por Importância

$$I = \int_1^4 (x+2)dx = 13,5$$

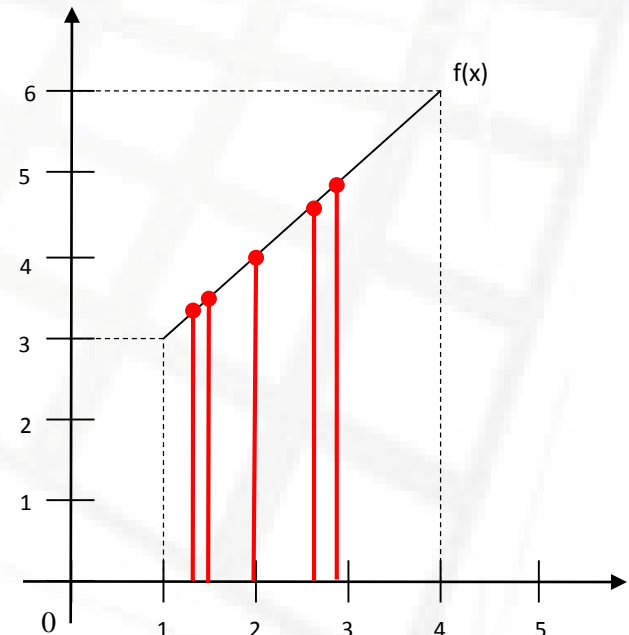
$$p(x) = c, \int_1^4 c dx = 1 \Leftrightarrow cx \Big|_1^4 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}, p(x) = \frac{1}{3}$$

Valores para N=5

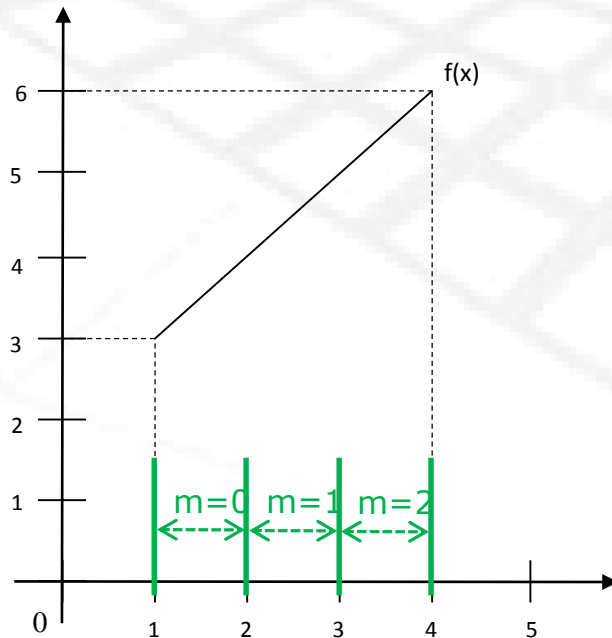
$\xi$	$x_i$	$f(x_i)$
0,31	1,93	3,93
0,59	2,77	4,77
0,61	2,83	4,83
0,09	1,27	3,27
0,15	1,45	3,45

$$\langle I \rangle = \frac{3}{5} (3,93 + 4,77 + 4,83 + 3,27 + 3,45) = 12,16$$

$$\langle I \rangle = \frac{3}{N=5} \sum_{i=0}^{N-1=4} (x_i + 2)$$



- As amostras podem ser melhor distribuídas no domínio se este for subdividido em subdomínios disjuntos (strata) e o integral calculado separadamente em cada estrato



$$\int_1^4 (x + 2) dx = \sum_{m=0}^{m=2} \int_{1+m}^{1+m+1} (x + 2) dx$$

$$\left\langle \int_1^4 (x + 2) dx \right\rangle = \sum_{m=0}^{m=2} \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} \frac{f(x_{m,i})}{p(x_{m,i})}$$

$$I = \int_1^4 (x+2)dx$$

$$p(x) = c, \int_1^4 c dx = 1 \Leftrightarrow cx \Big|_1^4 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}, p(x) = \frac{1}{3}$$

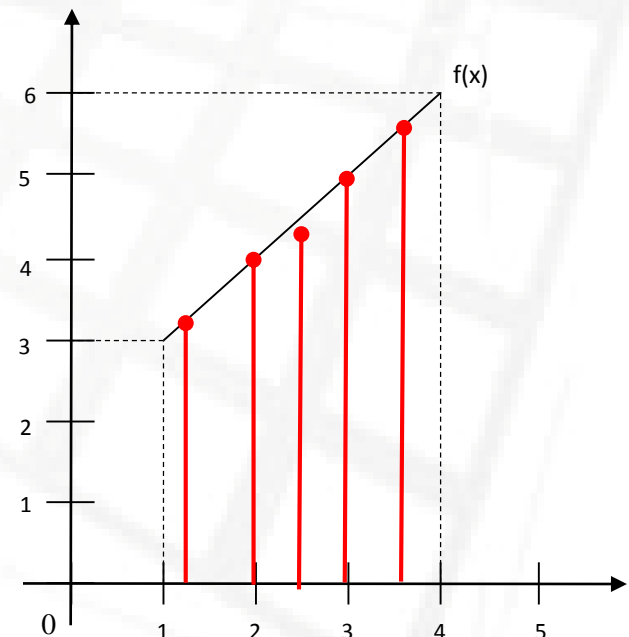
Valores para  $m=N=5$  (1 sample per stratum)

$\xi$	$\alpha_j$	$x_i$	$f(x_i)$
0,31	1	1,19	3,19
0,59	1,6	1,95	3,95
0,61	2,2	2,57	4,57
0,09	2,8	2,85	4,85
0,15	3,4	3,49	5,49

$$\langle I \rangle = \frac{3}{5} (3,19 + 3,95 + 4,57 + 4,85 + 5,49) = 13,24$$

Nota:  $I=13,5$  e  $\langle I \rangle=12.16$  com uniforme

$$\langle I \rangle = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N(=m)} (x_i + 2)$$



## AMOSTRAGEM ESTRATIFICADA DA SEMIESFERA

$$L_r(p \rightarrow \omega_r) = \int_{\Omega_s} f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\vec{N}_p, \omega_i) d\omega_i$$

O ângulo sólido da semiesfera é  $2\pi$ , logo  $p(\omega)=1/2\pi$

Seleccionar as direcções com  $M$  strata em  $\theta$  e  $N$  strata em  $\psi$ :

$$(\theta, \psi) = \left( \cos^{-1} \frac{\xi_1 + j}{M}, 2\pi \frac{\xi_2 + i}{N} \right)$$

O integrador é:

$$\langle L_r(p \rightarrow \omega_r) \rangle = \frac{2\pi}{M * N} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\theta_i)$$

- Distribuição uniforme

$$p(x) = c; \int_a^b p(x)dx = 1; \int_a^b cdx = 1; cx \Big|_a^b = 1; c(b-a) = 1; c = \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow p(x) = \frac{1}{b-a}$$

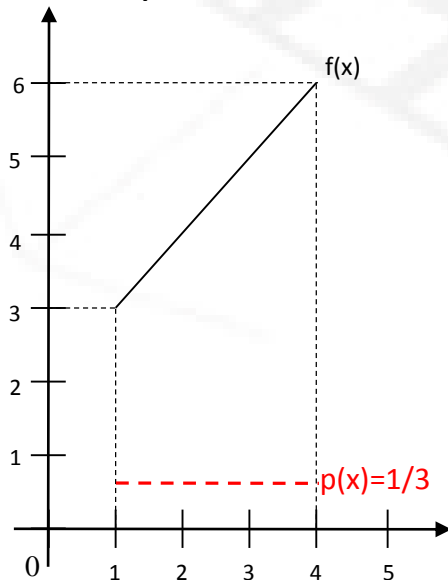
- Distribuição baseada numa função  $s(x)$

$$p(x) = cs(x); \int_a^b p(x)dx = 1; \int_a^b cs(x)dx = 1;$$

$$c \int_a^b s(x)dx = 1; c = \frac{1}{\int_a^b s(x)dx} \Leftrightarrow p(x) = \frac{s(x)}{\int_a^b s(x)dx}$$

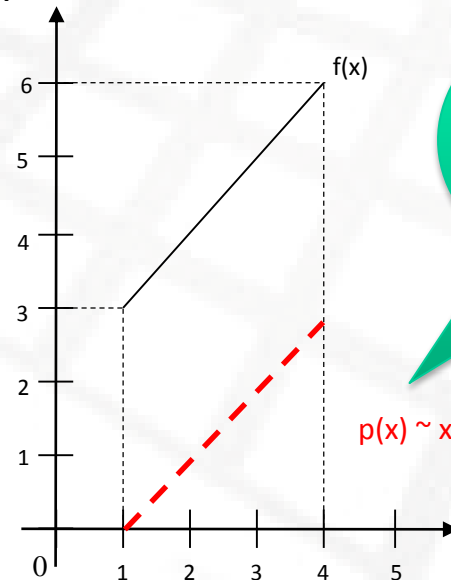
# Integração de Monte Carlo: importância

- Distribuição de probabilidade uniforme : para seleccionar as amostras não é usada informação acerca do integrando,  $f(x)$ ;
- Algumas partes de  $f(x)$  contribuem mais para o valor do integral: aquelas onde o valor de  $f(x)$  é maior;
- Se  $p(x)$  tem uma forma similar a  $f(x)$ , então as amostra ficarão localizadas, com maior probabilidade, nas partes mais importantes do domínio.



Amostragem Uniforme

Iluminação e Visualização II



Amostragem por Importância

Mas como normalizar e gerar amostras com esta pdf?



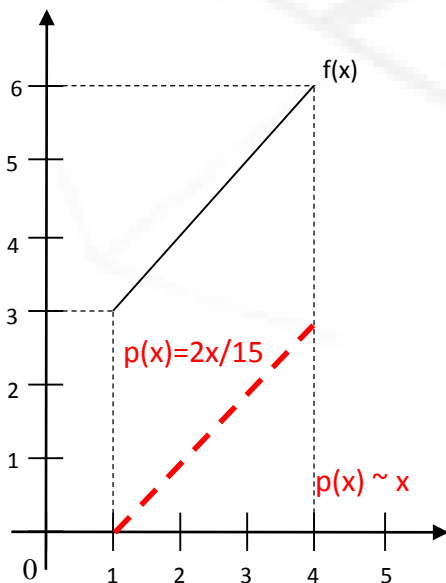
- Normalizar

$$p(x) = cx; c \int_1^4 x dx = 1; c = 2/15; p(x) = \frac{2x}{15}$$

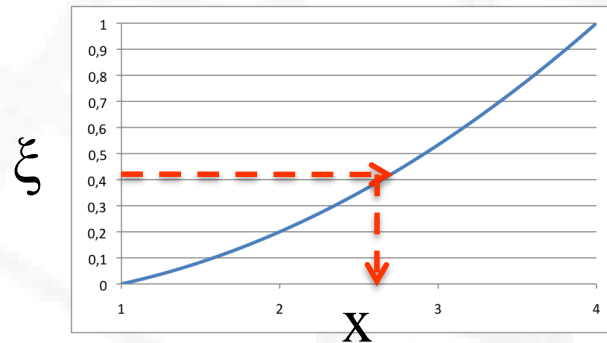
- Para extrair amostras que seguem esta pdf:

1. Calcular a cdf:

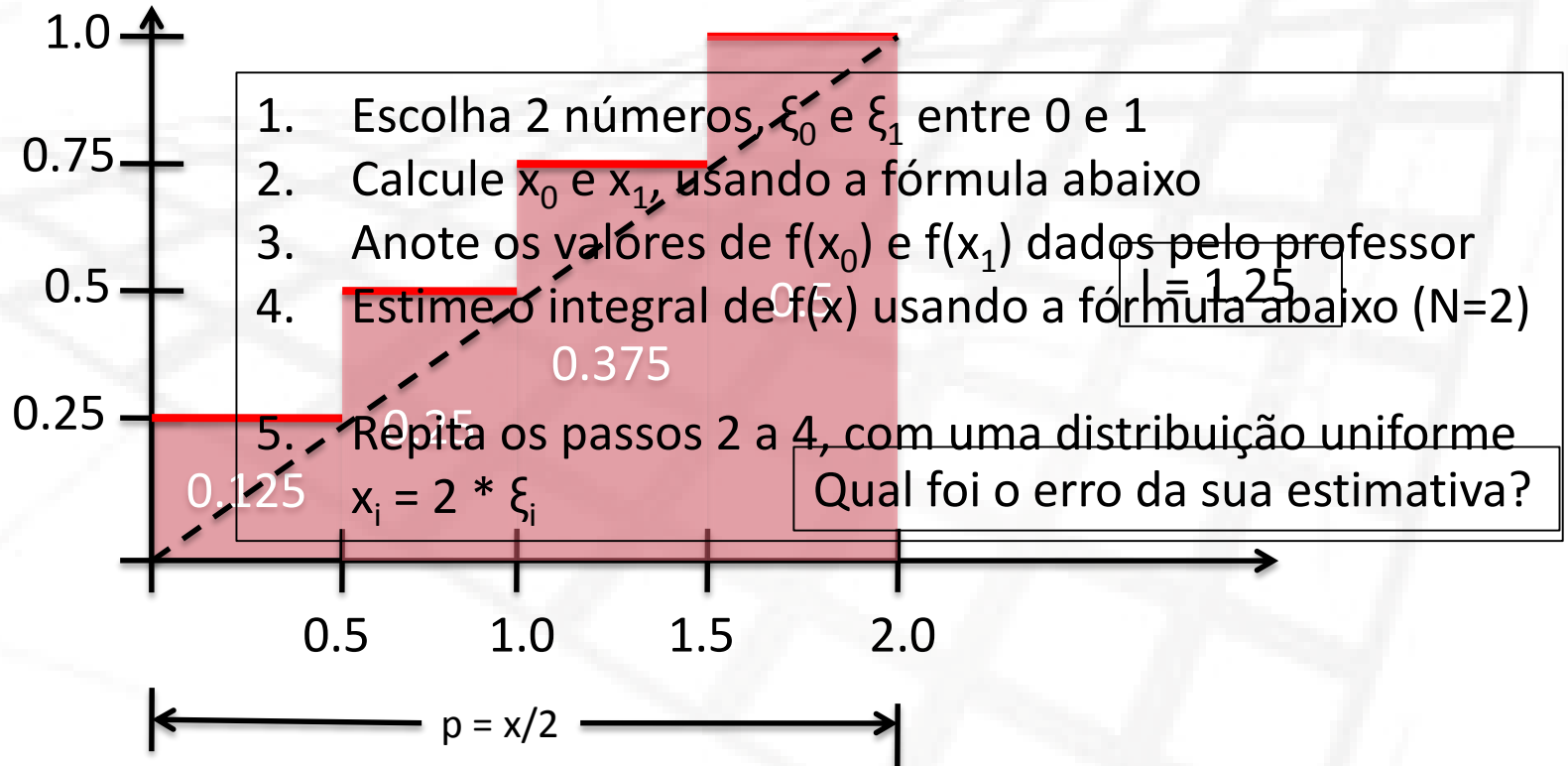
$$cdf(x) = \int_1^x p(x) dx = \int_1^x \frac{2x}{15} dx = \frac{2}{15} \frac{x^2}{2} \Big|_1^x = \frac{x^2 - 1}{15}$$



2. Inverter a cdf:



$$\frac{x^2 - 1}{15} = \xi \Leftrightarrow x = \sqrt{15\xi + 1}$$



$$\int_0^x \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^x = \frac{x^2}{4} = \xi \Rightarrow x = 2\sqrt{\xi}$$

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

$$I = \int_1^4 (x+2)dx = 13.5 \quad p(x) = cx, \quad \int_1^4 cx dx = 1 \Leftrightarrow c \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{15}{2}, \quad p(x) = \frac{2x}{15}$$

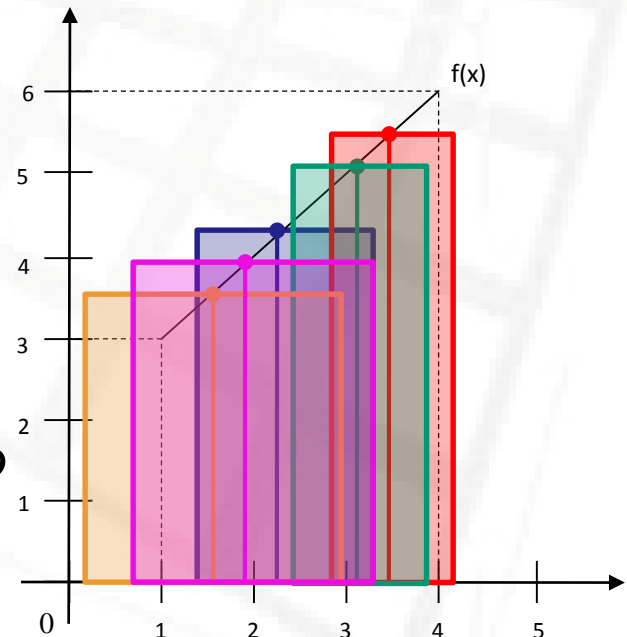
Valores para N=5

$\xi$	$x_i$	$p(x_i)$	$f(x_i)$
0,31	2.37	0.316	4,37
0,59	3.13	0.417	5,13
0,61	3.19	0.425	5,19
0,09	1.53	0.204	3.53
0,15	1.80	0.240	3.80

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(x_i + 2)}{2x_i / 15}, \quad x_i = \sqrt{15\xi + 1}$$

$$\langle I \rangle = \frac{1}{5} \left( \frac{4.37}{.316} + \frac{5.13}{.417} + \frac{5.19}{.425} + \frac{3.53}{.204} + \frac{3.80}{.240} \right) = 14.29$$

Uniforme e mesmos  $\xi$   $\langle I \rangle = 12.16$



$$L_r(p \rightarrow \omega_r) = \int_{\Omega_s} f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\vec{N}_p, \omega_i) d\omega_i$$

Integrando é um produto: seleccionar um dos factores.

COSINE WEIGHTED IMPORTANCE SAMPLING:

$$p(\omega) = \frac{\cos \theta}{\pi} \quad (\theta, \psi) = \left( \sin^{-1} \sqrt{\xi_1}, 2\pi\xi_2 \right)$$

$$\langle L_r(p \rightarrow \omega_r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i) \cos(\theta_i)}{\cos(\theta_i) / \pi}$$

$$\langle L_r(p \rightarrow \omega_r) \rangle = \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N f_r(p, \omega_i \leftrightarrow \omega_r) L(p \leftarrow \omega_i)$$

- Quando parar a emissão de raios secundários (*path length*)?
  - Usar uma profundidade máxima fixa
  - Quando a contribuição esperada de um raio é inferior a um dado limite
- Estes são métodos determinísticos que afectam o valor do integral (*bias*)!

<i>not biased</i>	<i>biased</i>
$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle I \rangle = I$	$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle I \rangle = I + \varepsilon$

## Monte Carlo: roleta russa

- Definir a probabilidade  $\alpha$  de terminar a travessia (não disparar um raio secundário)
- Antes de disparar um raio gerar um número aleatório,  $\xi$ , uniformemente distribuído em  $[0, 1[$
- Se  $\xi \leq \alpha$  então não disparar o raio
- Se  $\xi > \alpha$  então disparar o raio
- Uma vez que há uma probabilidade  $\alpha$  de não disparar um raio, a contribuição dos raios disparados deve ser multiplicada por  $1/(1-\alpha)$ , para compensar aqueles que não são disparados

$$L(p \leftarrow \Psi) \approx \frac{1}{(1-\alpha)} (\xi \leq \alpha ? 0 : L(p \leftarrow \Psi_i))$$